

Trigonometri

Ordet **trigonometri** er sammensat af de to ord **trigon** og **metri**, hvor trigon betyder trekant og metri kommer af det græske ord metros, som kan oversættes til måling. Så ordet trigonometri er altså et fremmedord, der betyder måling af trekanter.

Store konstruktioner

Inden vi skal i gang med trigonometrien skal I arbejde med, at afsætte store figurer. Det kan fx være på skolens idrætsplads eller et andet stort græsareal. I skal arbejde sammen i grupper med mindst tre deltagere i hver gruppe.

Materialer til hver gruppe:

- Landmålerstokke eller hegnspele
- Målebånd eller meterhjul
- Stor vinkelmåler – teodolit, tavlevinkelmåler eller lignende
- Lang flagsnor

Øvelse 1.

Udfør de store konstruktioner på Arbejdskort 1 - 4

Måling af højde

Ofte vil det være svært at måle højden af en flagstang, et højt træ eller en høj antennemast. Derfor har man fundet på forskellige metoder til at løse dette problem.

Materialer til hver gruppe:

- Landmålerstokke eller rundpinde
- Målebånd
- Lineal
- Jakobsstav
- Klinometer
- Teodolit
- Adgang til geometriprogram fx GeoGebra

Øvelse 2.

Udfør de målinger, der er angivet på Arbejdskort 5 – 8.



Trigonometri

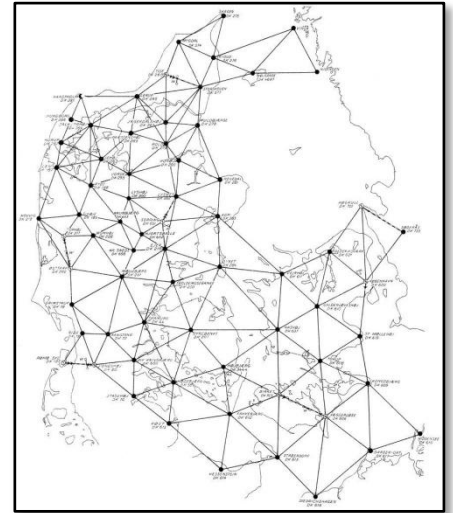
Trekantsmåling

Billedet viser, hvordan man har brugt trekanter, når Danmark skulle opmåles.

Tegningen er fra 1986 og udført af Geodætisk Institut.

Materialer til hver gruppe:

- Landmålerstokke eller hegnspæle
- Målebånd
- Lineal
- Jakobsstav
- Klinometer
- Teodolit
- Adgang til geometriprogram fx GeoGebra



Ved trekantsmåling er det muligt at bestemme afstande, som normalt vil være svære at måle. Det kan fx være afstanden til et træ på den modsatte søbred.



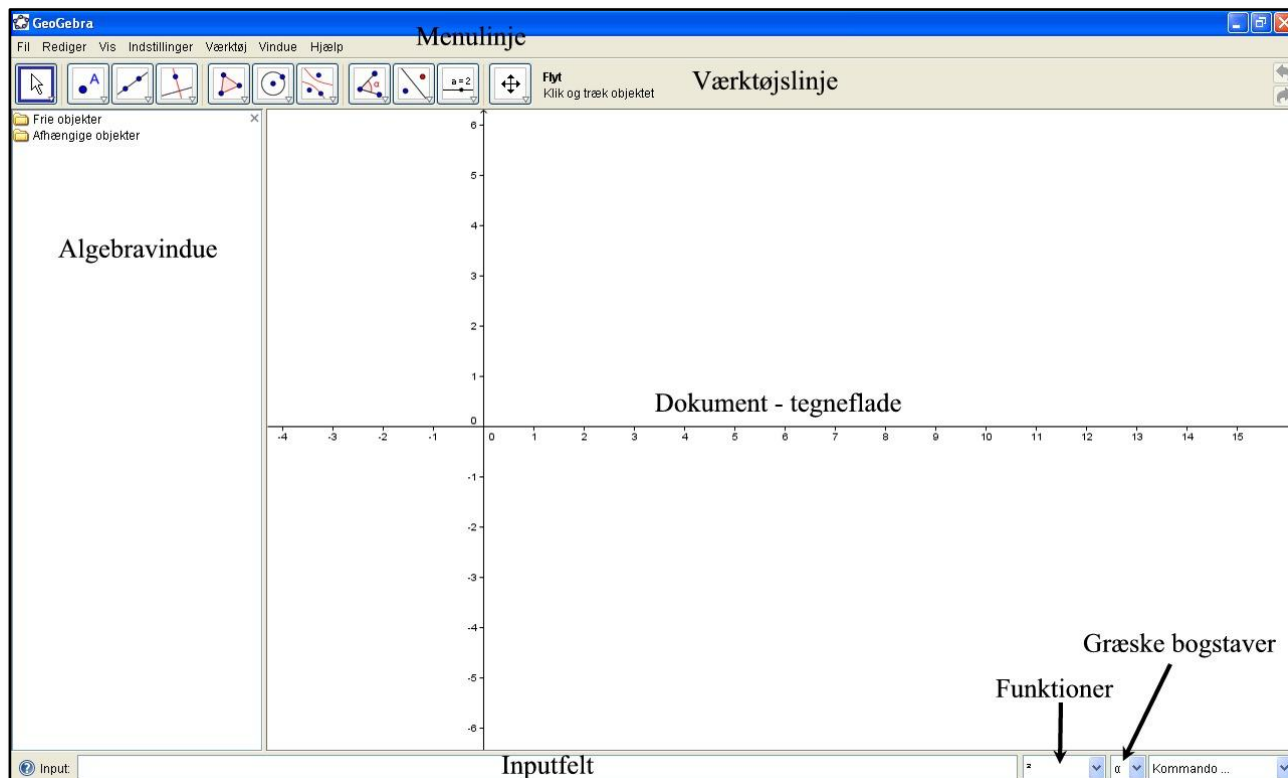
Øvelse 3.

Brug Arbejdskort 9 – 12 og udfør de foreslåede målinger og undersøgelser.

Trigonometri

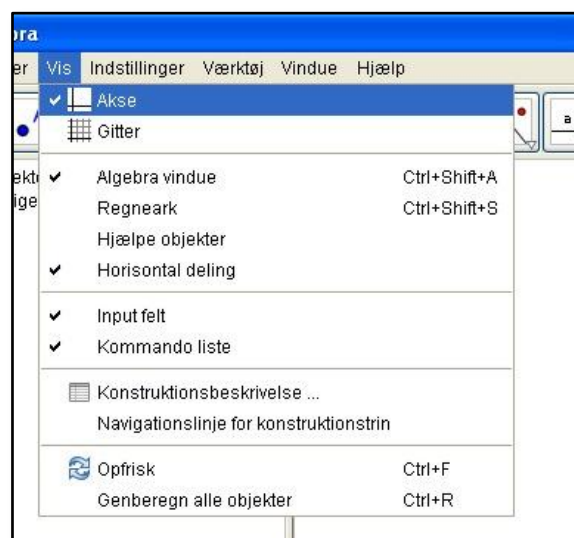
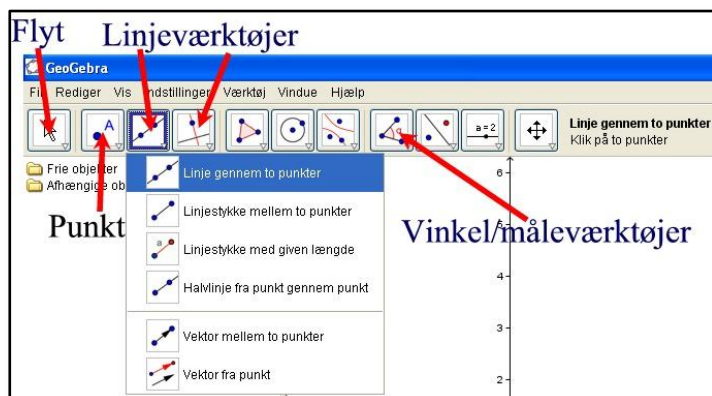
GeoGebra til trigonometri

Når GeoGebra åbnes ser man dette skærbillede.



Koordinatsystemet kan skjules i menuen **Vis** ved at fjerne fluebenet ud for **Akse**.

Følgende værktøjer er vigtige, når man arbejder med trigonometri.



Bag hvert værktøjsikon skjuler sig flere værktøjer, som bliver synlige, når der klikkes på den lille trekant i nederste højre hjørne.

Her er vist de linjeværktøjer, hvor man tegner en linje.

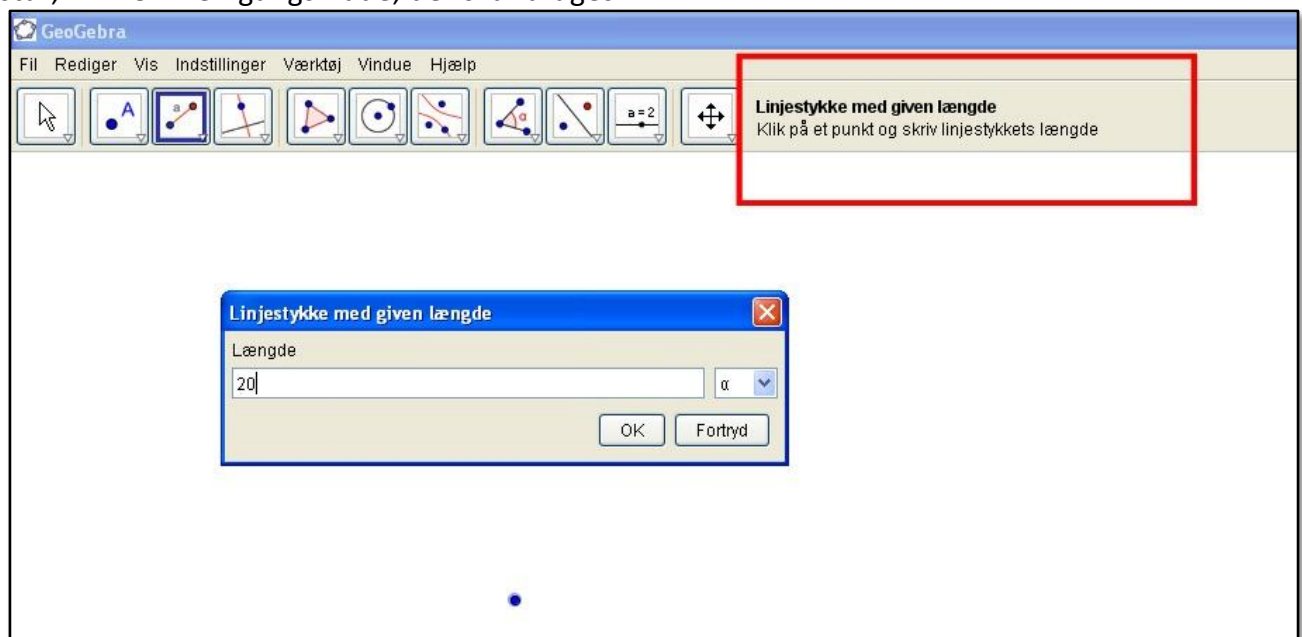
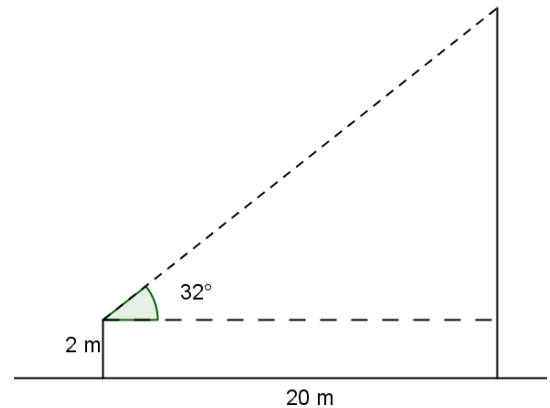
Trigonometri

Høj den af et træ

Skitsen er fremkommet ved, at nogle elever har foretaget målinger for at bestemme højden på et træ.

Ud fra skitsen herunder kan man bestemme højden af træet ved at tegne og måle i GeoGebra.

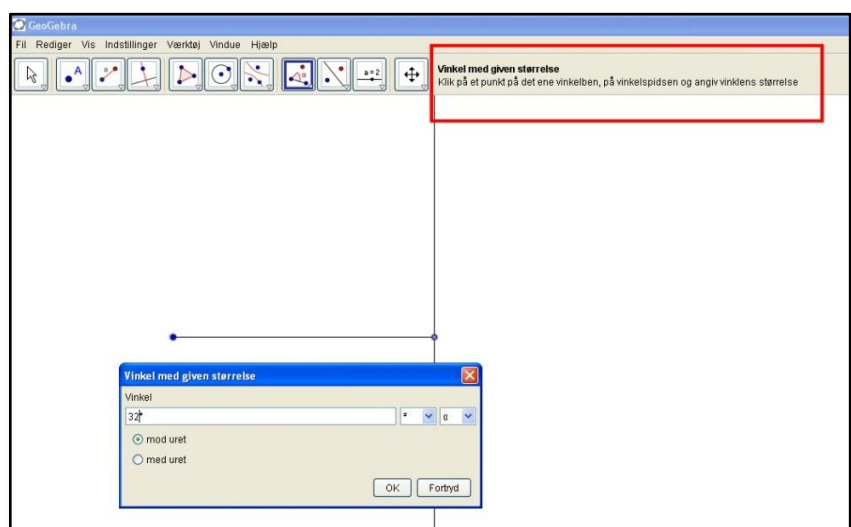
- Tegn en linje med længden 20 (der er ingen enheder).
Dette gøres ved at vælge værktøjet **Linjestykke med given længde**.
Læg mærke til, at der til højre for værktøjslinjen står, hvilken fremgangsmåde, der skal bruges.



Derefter tegnes en linje, der står vinkelret i linjestykkets højre endepunkt.

Næste punkt er at konstruere en vinkel på 32° .
Vær opmærksom på omløbsretningen!

Fra linjestykkets venstre endepunkt tegnes en halvlinje gennem det punkt, der viser en vinkel på 32° .

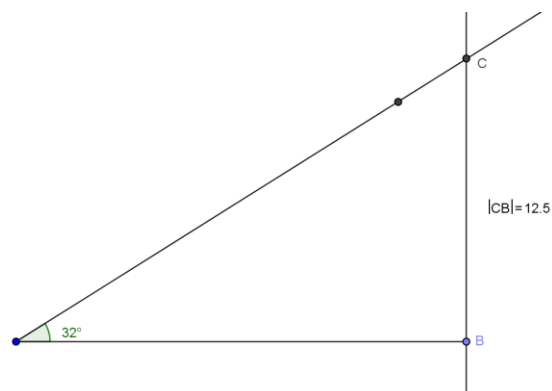


Trigonometri

Skæringspunktet mellem den vinkelrette linje og vinkelbenet konstrueres med punkt værktøjet **Skæring mellem to objekter**.

Til slut måles afstanden mellem de to punkter, der markerer træets top og den vandrette linje. Dette gøres ved at bruge vinkel- og måleværktøjet **Længde**.

Da målingen af vinklen er sket i ca. 1,8 meters højde, kan træets højde beregnes ved dette regneudtryk:
 $12,5 + 1,8 = 14,3$



Træet har derfor en højde på ca. 14 meter.

Øvelse 4.

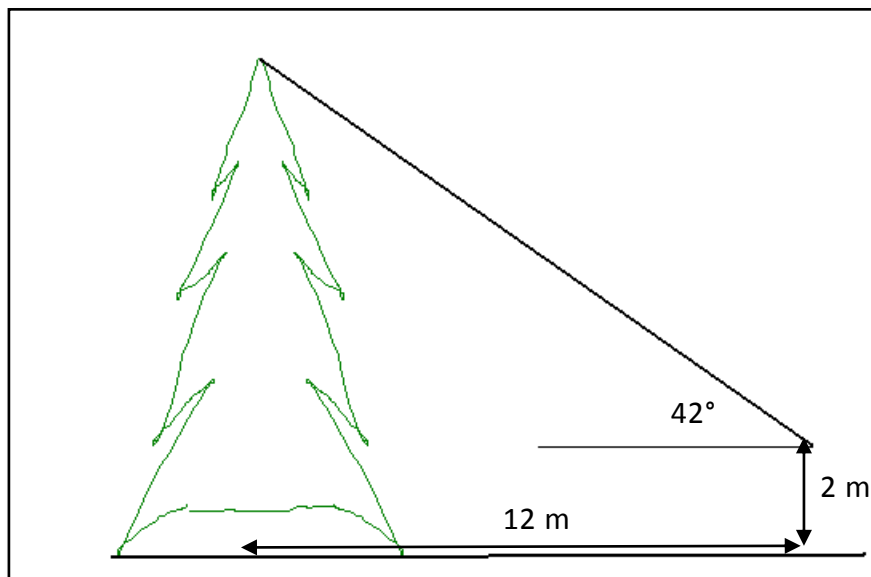
Find nogle høje genstande i nærheden af skolen og mål sigtevinklen, afstanden til genstanden og afstanden fra øjet til jordoverfladen.

Bestem derefter højden af genstanden ved at bruge GeoGebra.

Øvelse 5.

Skitsen herunder viser resultatet af en måling.

Brug GeoGebra til at bestemme højden af træet.



Trigonometri

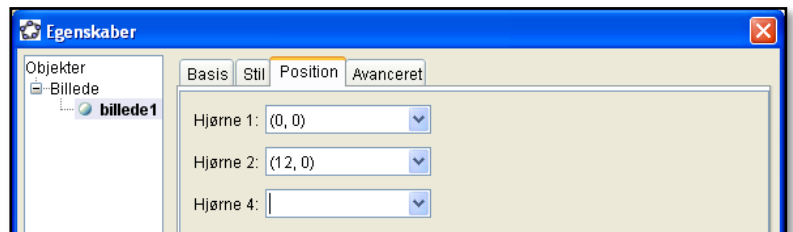
Måling på foto

Ved at tage foto med et digitalkamera og derefter lægge billedet ind i GeoGebra, kan man fx bestemme højden af træet midt i billedet.

Landmålerstokken til venstre er placeret, så den står vinkelret på linjen kamera-træ.

Afstanden mellem landmålerstokken til venstre og træet er målt til 10 meter.

Når billedet er taget skal det gemmes på computeren. Dernæst skal det indsættes i GeoGebra. Det gøres ved at bruge værktøjet **Indsæt billede**.



Når billedet er indsat, er det en god ide at låse billedets to nederste hjørner til punkter i koordinatsystemet.

Dette gør man ved at højreklikke på billedet – vælge egenskaber. I den dialogboks, der kommer vælger man fanen **Position** og angiver koordinaterne.

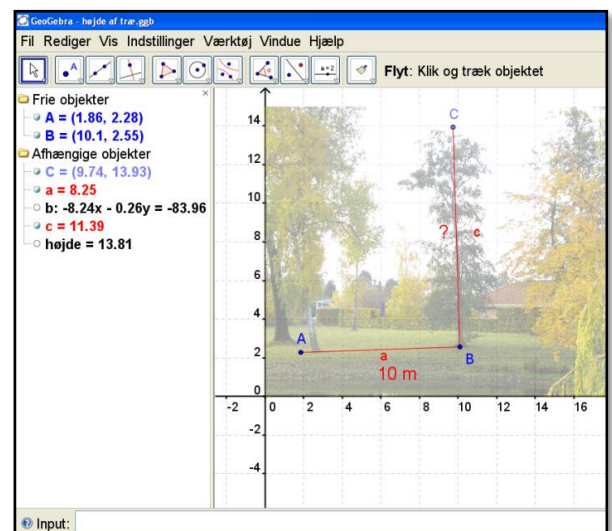
Ved at vælge fanen **Stil**, kan man ændre på billedets fyld. Vælg ca. 50!

Fremgangsmåde

- Tegn et linjestykke fra foden af landmålerstokken A til foden af træet B.
- Tegn en linje vinkelret på linjestykket AB gennem træets fodpunkt B.
- Afsæt toppen af træet C på den nye linje.
- Tegn linjestykket BC mellem træets fodpunkt og træets top.

De to linjestykker er a og c. Længden af de to linjestykker er angivet i algebravinduet.

Højden af træet kan derfor beregnes ved at skrive: $\text{højde} = 10/a * c$ i **Input** linjen. Resultatet vises som variabelen **højde=13.81** i algebravinduet. Træets højde er derfor ca. 14 meter.



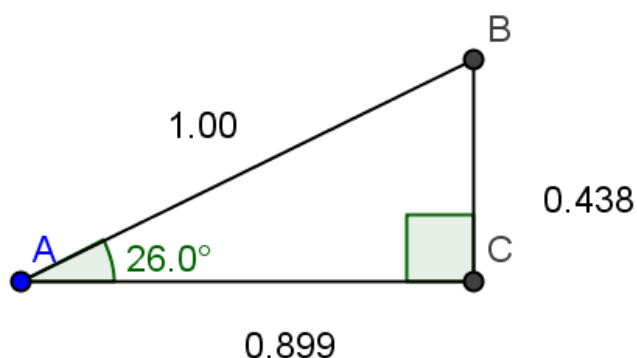
Trigonometri

Øvelse 6.

Tag et billede af en høj genstand, og brug fremgangsmåden, der er beskrevet ovenfor, og bestem genstandens højde.

Enhedstrekanten

Enhedstrekanten er en retvinklet trekant, hvor hypotenusen har længden 1.



Tegningen viser en enhedstrekant, hvor vinkel A er 26° .

Øvelse 7.

- Hvad er størrelsen af linjestykkerne a og b?
- Hvad sker der med størrelsen af a og b, når man ændrer på størrelsen af vinkel A i en enhedstrekant?

Undersøg enhedstrekanten

Øvelse 8.

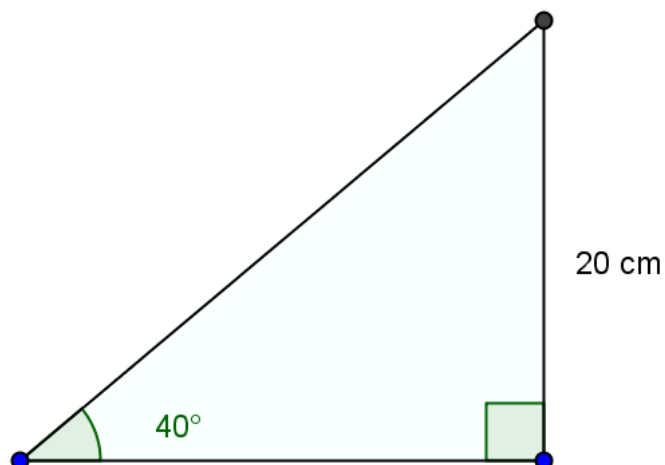
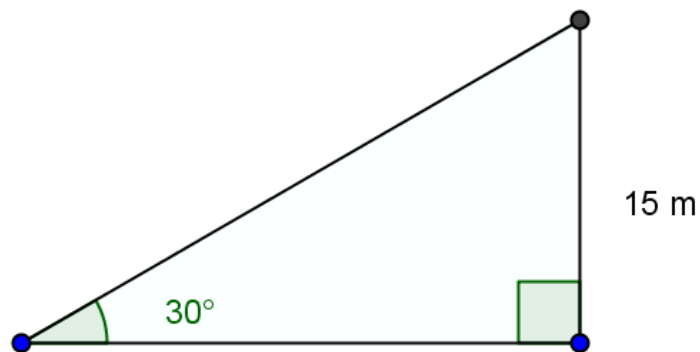
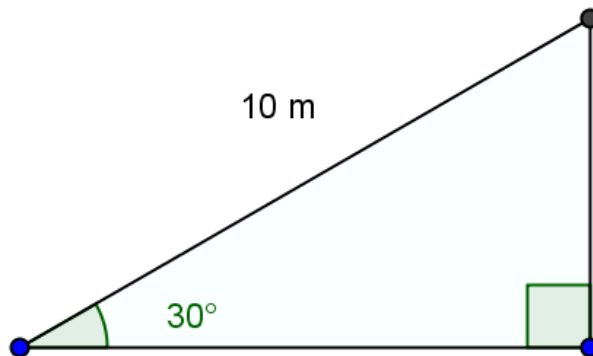
Tegn en enhedstrekant i GeoGebra og undersøg, hvordan størrelsen af a og b ændrer sig, når vinkel A ændres. Skriv resultaterne i et skema, som vist herunder.

$\angle A$	10°								90°
a									
b									

Trigonometri

Øvelse 9.

Brug resultaterne fra Øvelse 8. og beregn størrelsen af de manglende sider i trekanterne, der er vist herunder.



Trigonometri

Sinus og cosinus

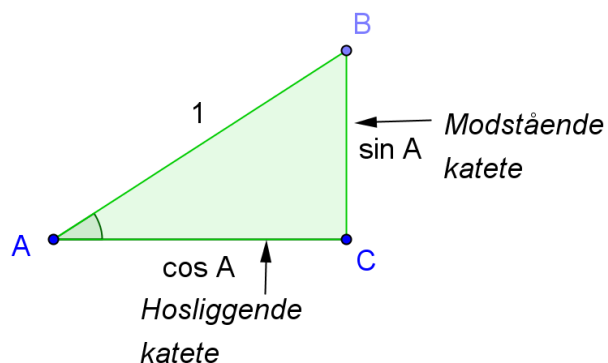
Tegningen viser en enhedstrekant, hvor de to kateter er a og b . Hypotenusen har længden c .

Længden af vinkel A 's modstående katete i enhedstrekanten er sinus til A .

Det skrives **sin A**.

Længden af vinkel A 's hosliggende katete i enhedstrekanten er cosinus til A .

Det skrives **cos A**.



Værdierne $\sin A$ og $\cos A$ afhænger kun af størrelsen af vinkel A .

Lommeregner, regneark og andre regnetekniske hjælpemidler kan beregne værdien af sinus og cosinus til en vinkelstørrelse.

Øvelse 10.

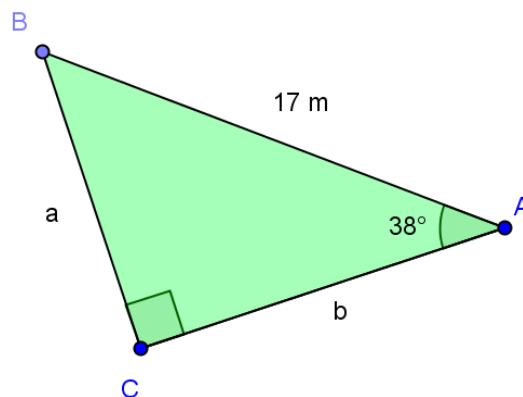
Brug et regneteknisk hjælpemiddel til at bestemme sinus og cosinus til forskellige vinkelstørrelser, og skriv resultatet i et skema, som vist herunder.

$\angle A$	0°	12°	27°	45°	63°	76°	80°	87°	90°
$\sin A$									
$\cos A$									

Hvis man kender længden af en side og størrelsen på en af de vinkler, der ikke er ret i en retvinklet trekant, er det muligt at beregne længden af de andre sider.

Øvelse 11.

Beregn længden af siderne a og b i den retvinklede trekant til højre.



Trigonometri

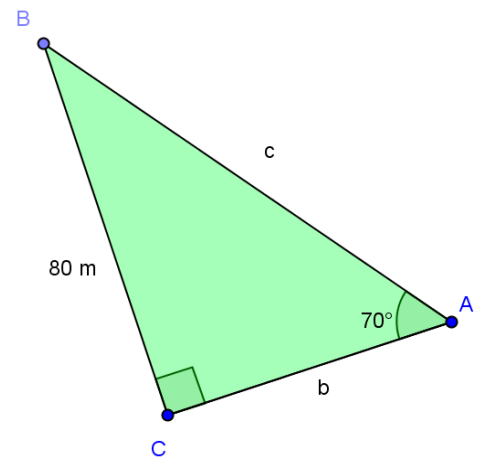
Øvelse 12.

I en retvinklet trekant er vinkel A 57° og hypotenusen er 12 cm.

Beregn længderne af de to kateter.

Øvelse 13.

Beregn størrelsen af hypotenusen i trekanten til højre.



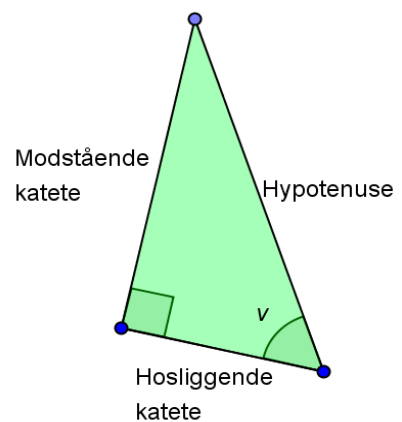
Den retvinklede trekant

I den retvinklede trekant til højre er størrelsen af en vinklerne kendt!

Den katete, som ligger hos den kendte vinkel bliver kaldt **Den hosliggende katete**.

Den katete som ligger modsat den kendte vinkel bliver kaldt **Den modstående katete**.

I regneudtrykket herunder betyder *Modstående katete* længden af den modstående katete.



$$\text{Modstående katete} = \sin(v) \cdot \text{Hypotenuse}$$

Øvelse 14.

Hvordan kan man ud fra kendskabet til enhedstrekanten give en forklaring på regneudtrykket herover?

Øvelse 15.

Skriv et tilsvarende regneudtryk, hvor det er $\cos(v)$ og *Den modstående katete*, der indgår.

I formelsamlingen står disse to formler:

$$\sin v = \frac{\text{den modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos v = \frac{\text{den hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Øvelse 16.

Udtænk et ræsonnement for, hvordan man kan være kommet frem til de to formler.

Trigonometri

Tangens

Øvelse 17.

- Tegn tre forskellige retvinklede trekanter, hvor den ene vinkel er 41° .
- Mål længderne af kateterne i hver trekant – skriv resultaterne i skema, som vist herunder.
- Beregn forholdet $\frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$.
- Er forholdet det samme for de tre trekanter?
- Undersøg retvinklede trekanter med andre vinkelstørrelser.

	Trekant 1	Trekant 2	Trekant 3
<i>Modstående katete</i>			
<i>Hosliggende katete</i>			
$\frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$			

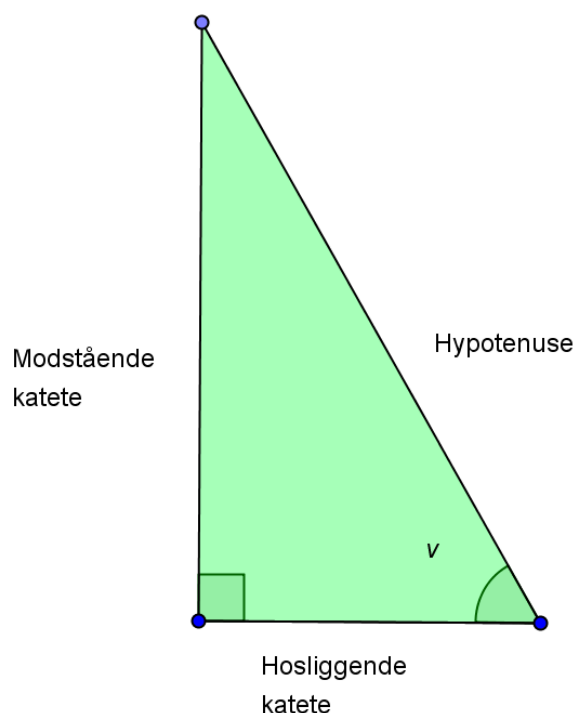
Forholdet mellem den modstående katete og den hosliggende katete i en retvinklet trekant kaldes tangens til vinklen.

$$\tan(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$

Tangens til en vinkel kan bestemmes ved hjælp af et regneteknisk hjælpemiddel.

Øvelse 18.

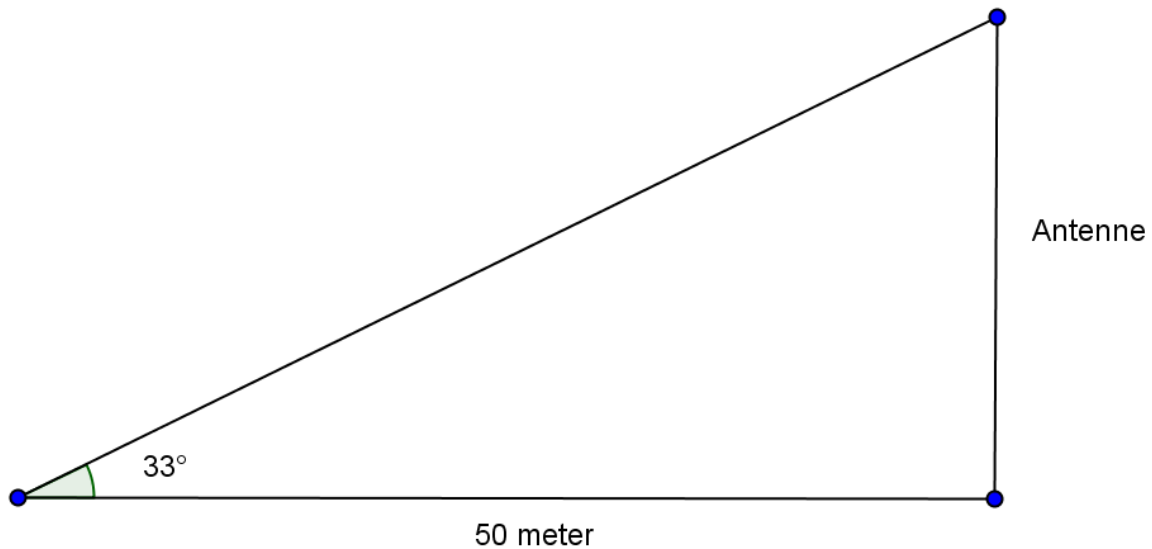
Brug et regneteknisk hjælpemiddel til at bestemme tangens til 41° .



Trigonometri

Øvelse 19.

En gruppe elever vil bestemme højden på en antenne, som står i nærheden af skolen.



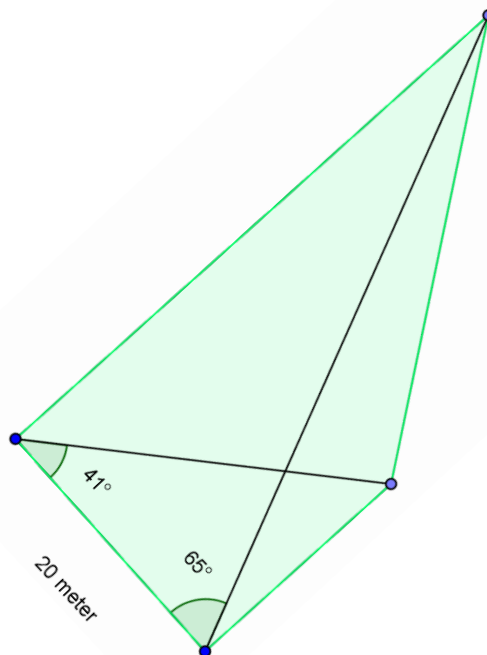
Skitsen herover viser de mål, som de har taget.

- Beregn antennens højde.

Øvelse 20.

Skitsen viser en grund med to rette vinkler.

- Beregn grundens omkreds.
- Beregn arealet af grunden.



Trigonometri

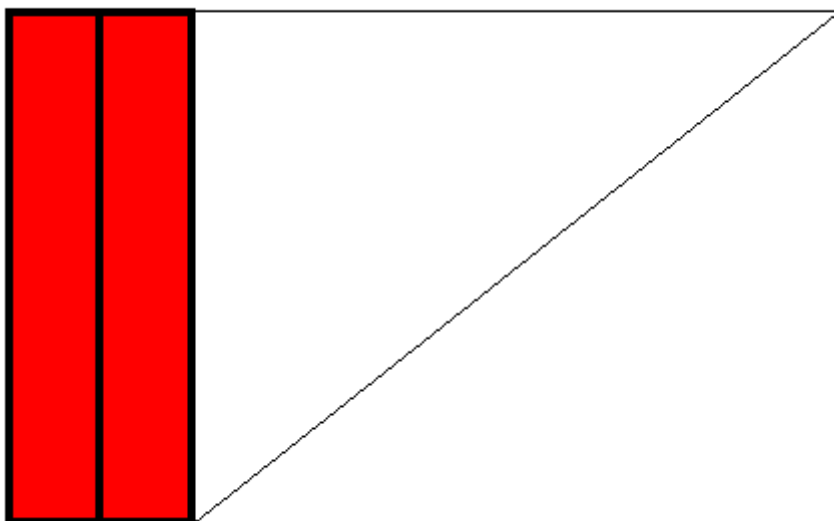
Måling og beregning i retvinklede trekanter

Ved at bruge de trigonometriske funktioner kan man ved at måle en vinkel og en afstand beregne længden af de andre to afstande i en retvinklet trekant,

Øvelse 21.

Find forskellige høje genstande. Mål sigtevinkel og en afstand og beregn de manglende afstande.

Det er ikke kun højder, der kan måles. Tegningen herunder er en skitse, hvor man ser et hus ovenfra og ønsker at bestemme afstanden fra et punkt til hjørnet af huset. Læg mærke til, at der er en retvinklet trekant på skitsen.



Øvelse 22.

Brug metoden, der er vist herover og bestem afstande ved at måle en vinkel og en sidelængde i en retvinklet trekant.



Trigonometri

Vinkelstørrelse

Når man arbejder med trekanter kan man have brug for at bestemme størrelsen af vinklerne.

Alle kender den retvinklede 3 – 4 – 5 – trekant. Men hvad er størrelsen af de to vinkler der ikke er rette?

Dette problem og andre tilsvarende problemer kan let løses ved at konstruere trekanten i GeoGebra. Her er vist, hvordan en sådan konstruktion kan være foretaget.

Når konstruktionen er færdig, skal man bruge værktøjet **Vinkel** til at måle størrelserne på de to vinkler, der ikke er rette.

Øvelse 23.

- Brug GeoGebra og konstruer en retvinklet 3 – 4 – 5 – trekant.
- Brug værktøjet **Vinkel** og bestem størrelsen af de to vinkler, der ikke er rette.

Øvelse 24.

En trekant har sidelængderne 7 cm, 9 cm og 12 cm. Brug GeoGebra til at bestemme størrelsen på hver af de tre vinkler.

Øvelse 25.

Skitsen viser gavlen på et hus.

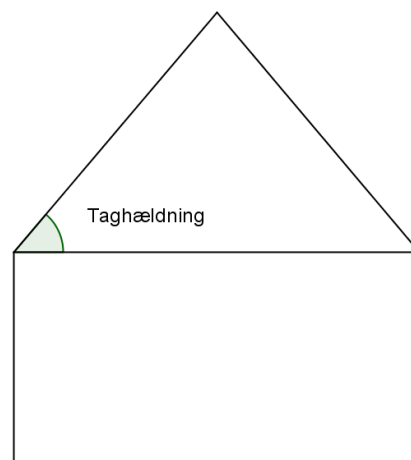
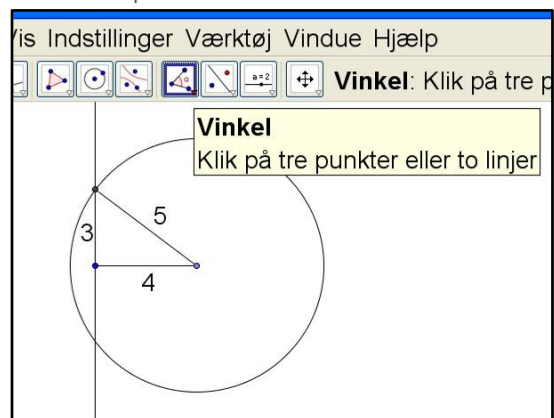
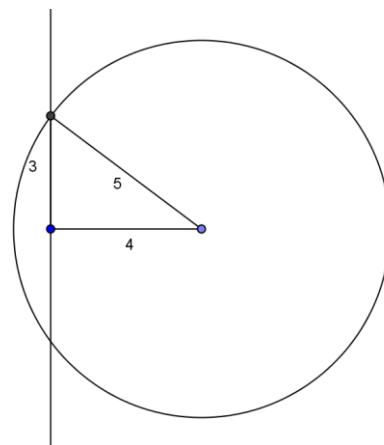
Tagets hældning kan angives som vinklen mellem vandret og taget.

Husets bredde er 10 meter og gavlspidsen har form som en ligebeinet trekant med en sidelængde på 7,5 meter.

- Brug GeoGebra til at bestemme tagets hældning.

Øvelse 26.

Undersøg gavle – fotografer evt. med et digitalkamera og brug GeoGebra til at bestemme hældningen på tagene.



Trigonometri

Beregning af vinkelstørrelser i den retvinklede trekant

Ved at bruge forskellige regnetekniske hjælpemidler er det muligt at bestemme størrelsen af en vinkel, hvis man kender sinus, cosinus eller tangens til vinklen.

Når man vil beregne størrelsen af en vinkel, hvor man kender værdien for sinus, skal man bruge den inverse funktion til sinus.

Den funktion kan skrives på forskellige måder.

I denne fremstilling bruges skrivemåden $\sin^{-1}$ for den inverse funktion til sinus, men ofte bruges betegnelsen $\arcsin$ for denne funktion. Dette gælder fx regneark.

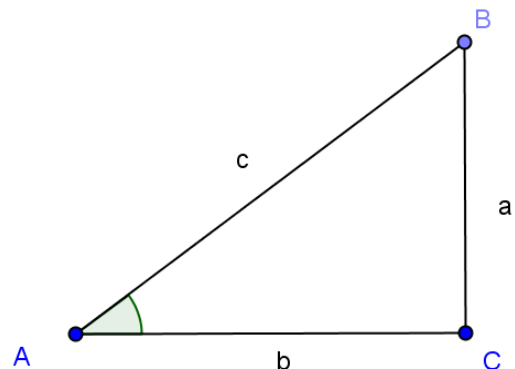
Øvelse 27.

Brug din lommeregner til at beregne størrelsen af vinklerne når

- $\sin A = 0,5$
- $\cos B = 0,5$
- $\tan C = 1,2$
- $\sin D = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Hvis man skal beregne størrelsen af en vinkel i den retvinklede trekant kan man bruge følgende regler.

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right), A = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right), \text{ og } A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$



Øvelse 28.

I en retvinklet trekant ABC er kateten $a = 7$ cm og kateten $b = 9$ cm.

- Beregn længden af hypotenusen c .
- Beregn størrelsen af de to vinkler, der ikke er rette.

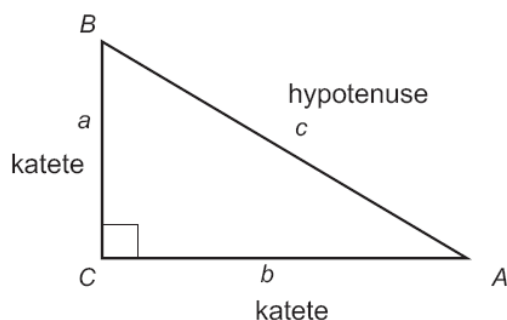
Øvelse 29.

I en retvinklet trekant er den hypotenusen dobbelt så lang som den korte katete. Beregn størrelsen af vinklerne i trekanten.

Trigonometri

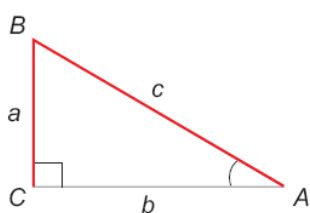
Fra formelsamlingen

Trigonometri



Siden b er den hosliggende katete til $\angle A$.

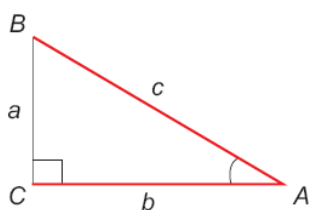
Siden a er den modstående katete til $\angle A$.



Om sinus til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

$$\sin v = \frac{\text{den modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

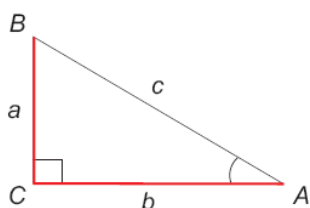
$$\sin A = \frac{a}{c}$$



Om cosinus til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos v = \frac{\text{den hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$



Om tangens til en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder:

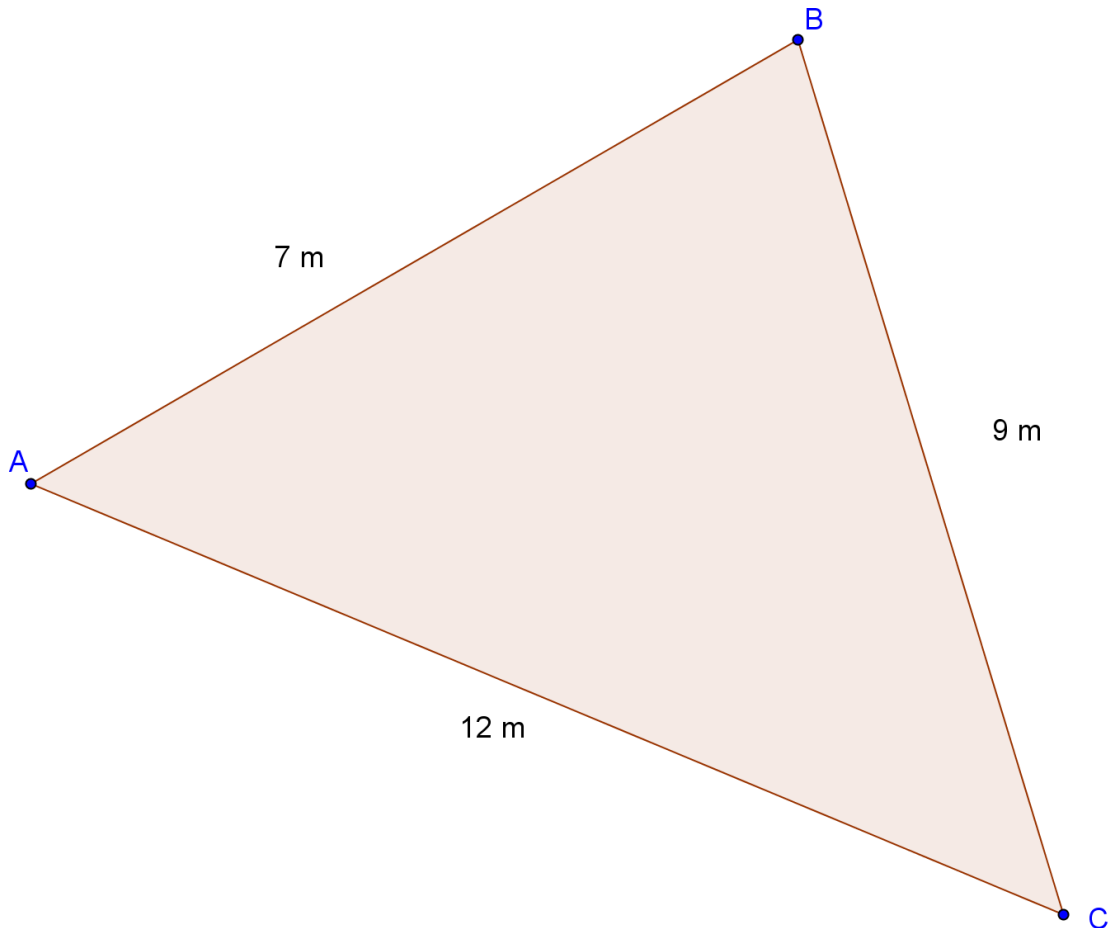
$$\tan v = \frac{\text{den modstående katete}}{\text{den hosliggende katete}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

Kilde: Formelsamling til folkeskolens afsluttende prøver i matematik – Skolestyrelsen

Arbejdskort 1

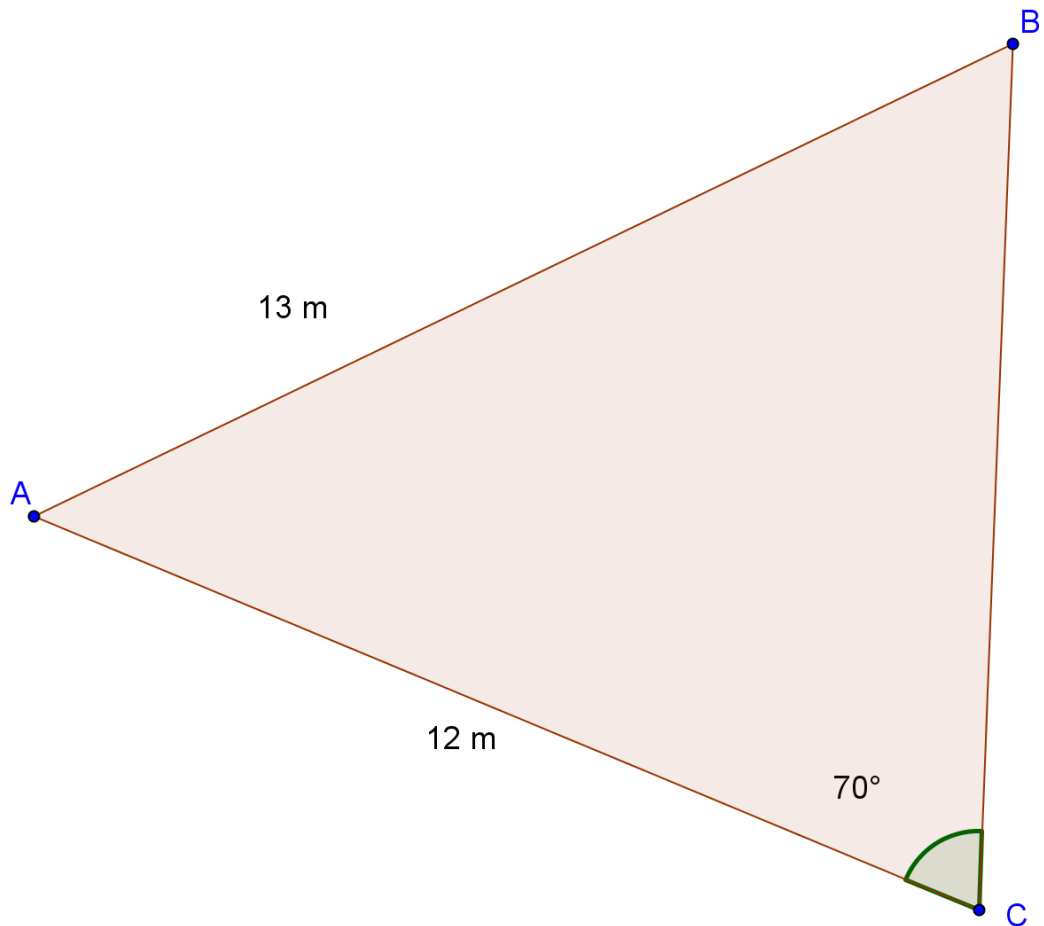
Skitsen herunder viser en trekant, som skal afsættes på skolens boldbane. Hjørnerne markerer I med pinde og siderne med snor.



- Mål størrelsen af de tre vinkler og kontroller at summen bliver 180° .

Arbejdskort 2

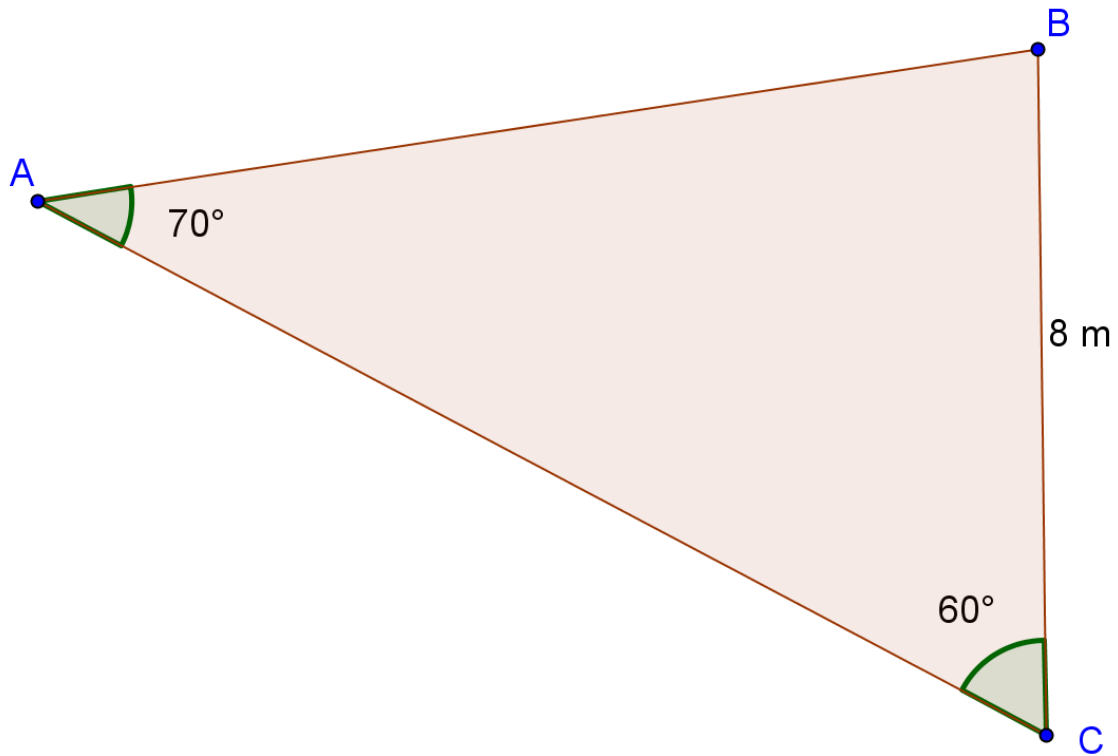
Skitsen herunder viser en trekant, som skal afsættes på skolens boldbane. Hjørnerne markerer I med pinde og siderne med snor.



- Mål størrelsen af de to andre vinkler og kontroller at summen bliver 180° .
- Mål længden af siden a.

Arbejdskort 3

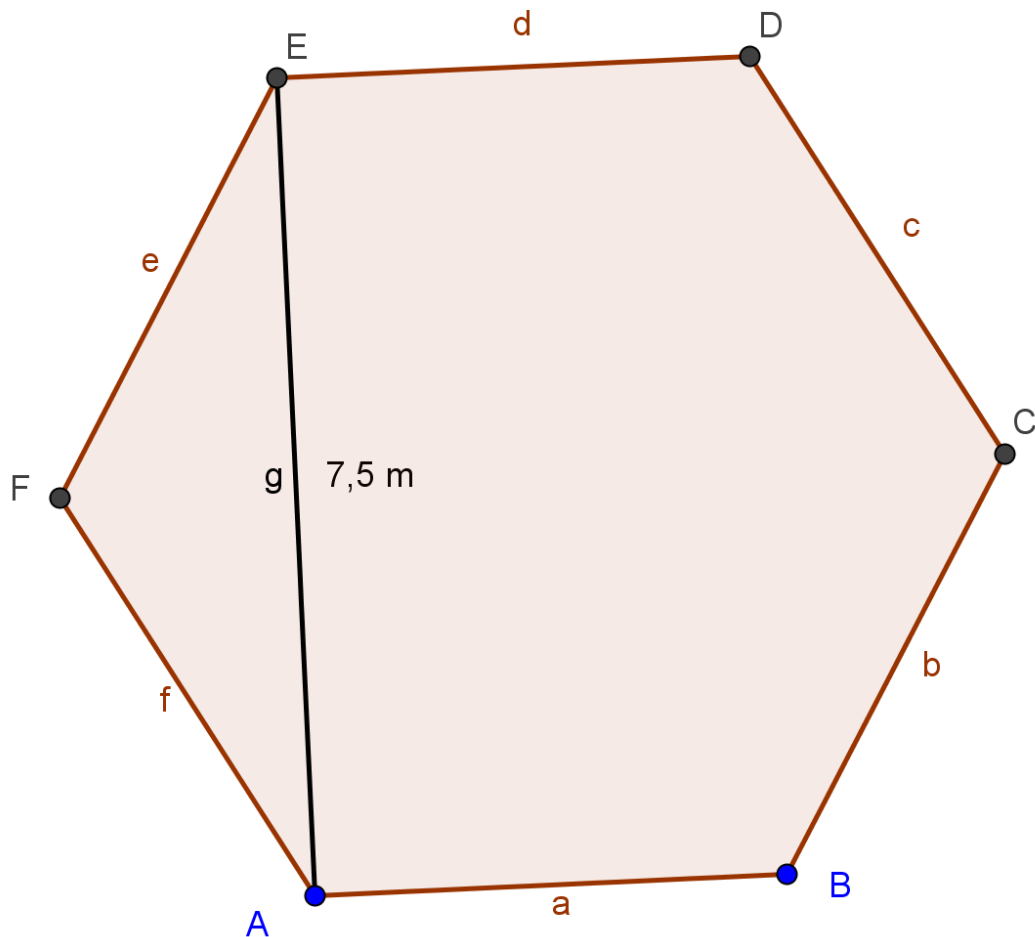
Skitsen herunder viser en regulær, som skal afsættes på skolens boldbane. Hjørnerne markerer I med pinde og siderne med snor.



- Mål størrelsen af de to andre sider.

Arbejdskort 4

Skitsen herunder viser en regulær sekskant, som skal afsættes på skolens boldbane. Hjørnerne markerer I med pinde og siderne med snor.



- Redegør for jeres fremgangsmåde (Det kunne eventuelt podcastes!)

Arbejdskort 5

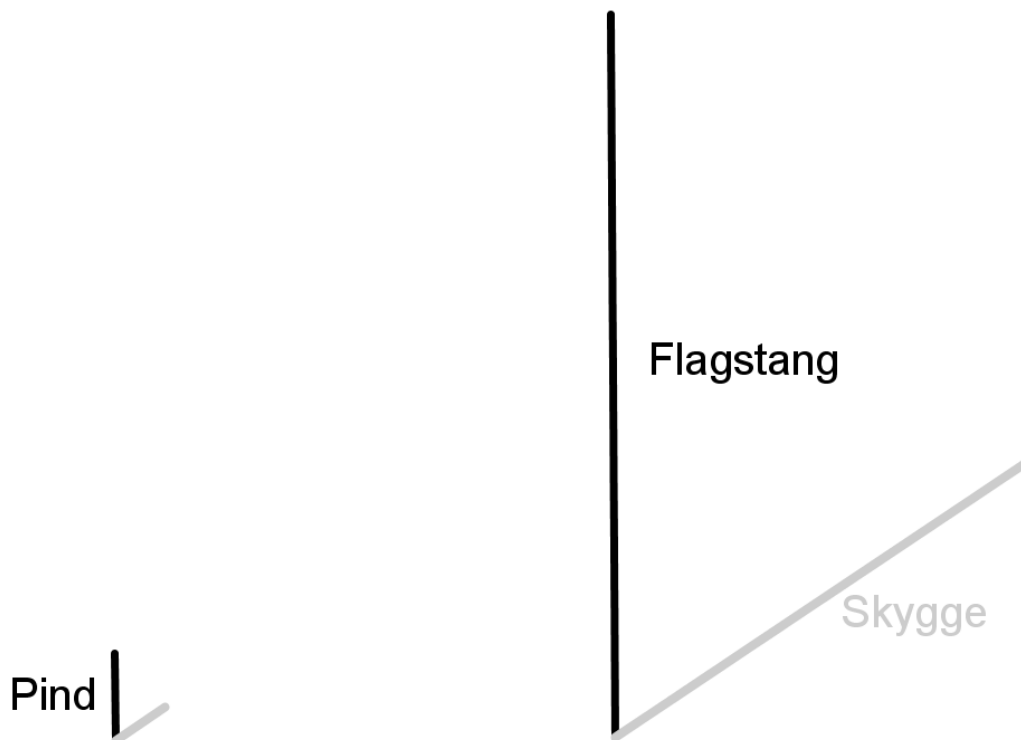
- Bestem højden af skolens flagstang eller en anden høj genstand.

Materialer: Stok, målebånd og solskin.

Denne øvelse kan kun udføres, når Solen skinner.

Fremgangsmåde

- Sæt pinden fast i jorden
- Mål længden af den synlige del af pinden.
- Mål længden af pindens skygge.
- Mål længden af flagstangens skygge.
- Tegn en skitse med resultaterne.



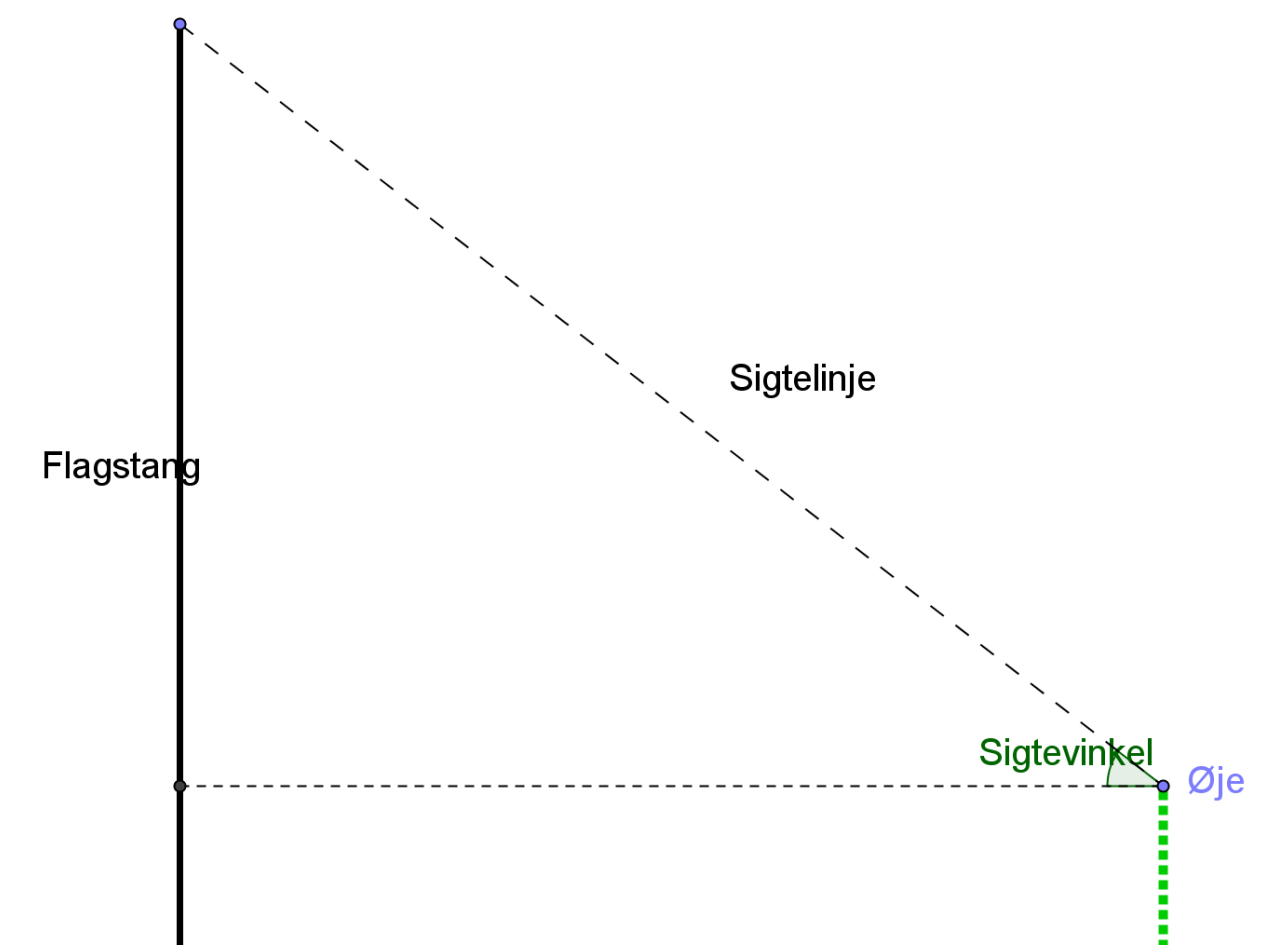
- Når I kommer tilbage til klassen skal I fremstille en tegning i et passende målestoksforhold, så I kan bestemme flagstangens højde.

Arbejdskort 6

- Bestem højden af skolens flagstang eller en anden høj genstand.

Materialer: Højdemåler og målebånd.

Skitsen herunder viser, hvordan man kan bruge højdemåleren til at bestemme sigtevinklen til flagstangen.



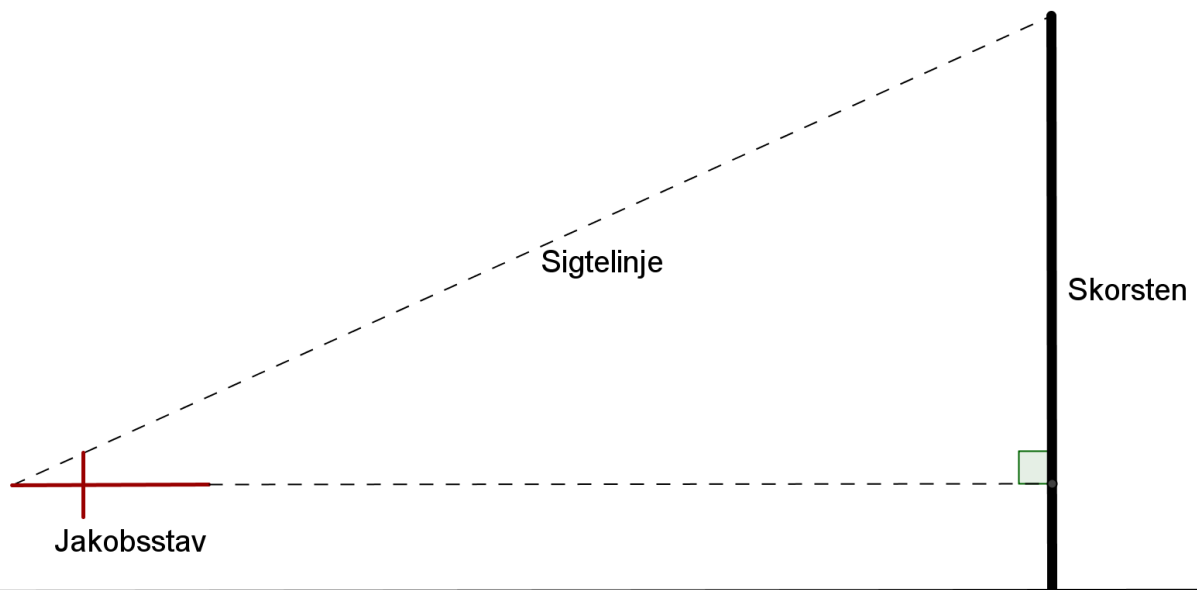
- Tag de mål, som I mener, er nødvendige for at kunne fremstille en tegning i et bestemt målestoksforhold.
- Tegn en skitse og skriv målene på.
- Når I kommer tilbage til klassen skal I fremstille en tegning, så I kan bestemme træets højde.

Arbejdskort 7

Bestem højden af skolens skorsten eller en anden høj genstand.

Materialer: Jakobsstav og målebånd.

Skitsen herunder viser, hvordan man kan bruge jakobsstaven, når man vil bestemme højden af skolens skorsten.



- Tag de mål, som I mener, er nødvendige for at kunne fremstille en tegning i et bestemt målestoksforhold.
- Tegn en skitse og skriv målene på.
- Beregn skorstenens højde.

Arbejdskort 8

- Bestem højden af et træ eller anden høj genstand.

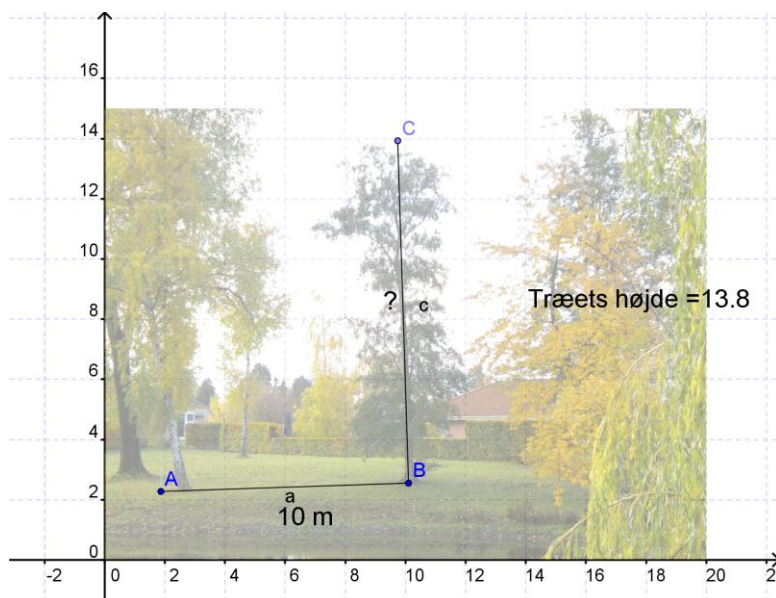
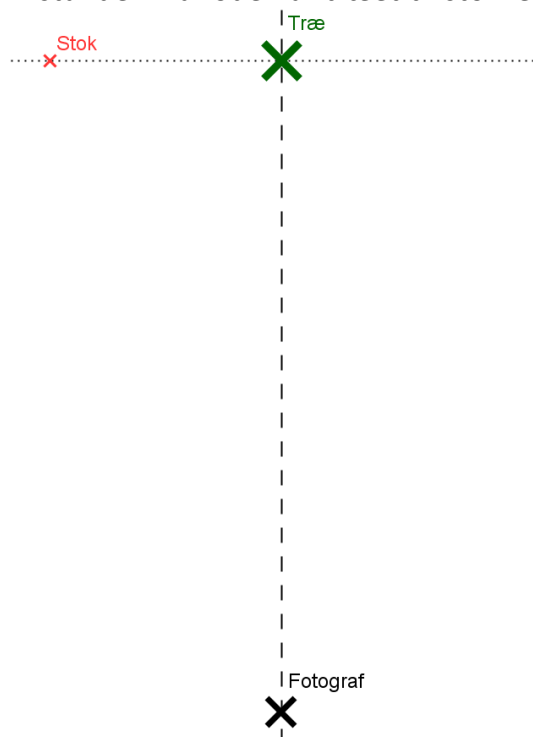
Materialer: Digitalkamera, stok og målebånd.

En gruppe elever brugte et digitalkamera, da de skulle bestemme højden af et træ.

Fotografiet og skitsen viser, hvordan de gjorde.

genstanden skal være midt i billedet!

Afstanden fra foden af træet til stokken målte de til 10 meter.



- Find en høj genstand, og placer stok og fotograf på samme måde som eleverne.
- Tag et billede.
- Når I kommer tilbage til klassen, kan I enten lægge billedet ind i et geometriprogram eller printe det ud.
- Bestem højden på flagstangen.

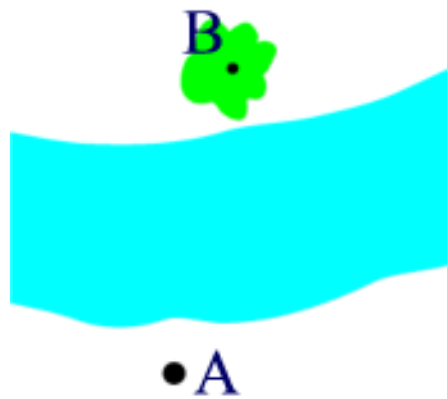
Arbejdskort 9

- Bestem afstanden til et træ.

Materialer: Teodolit, målebånd og landmålerstokke.

Afstanden fra A til træet i punkt B, kan selvfølgelig bestemmes ved at bruge målebåndet. Men hvad nu hvis træet står på den anden side af en å eller et stort vandhul. Hvordan skal man så gøre?

Skitsen herunder viser, hvordan et træ er placeret på den anden side af en bred å.



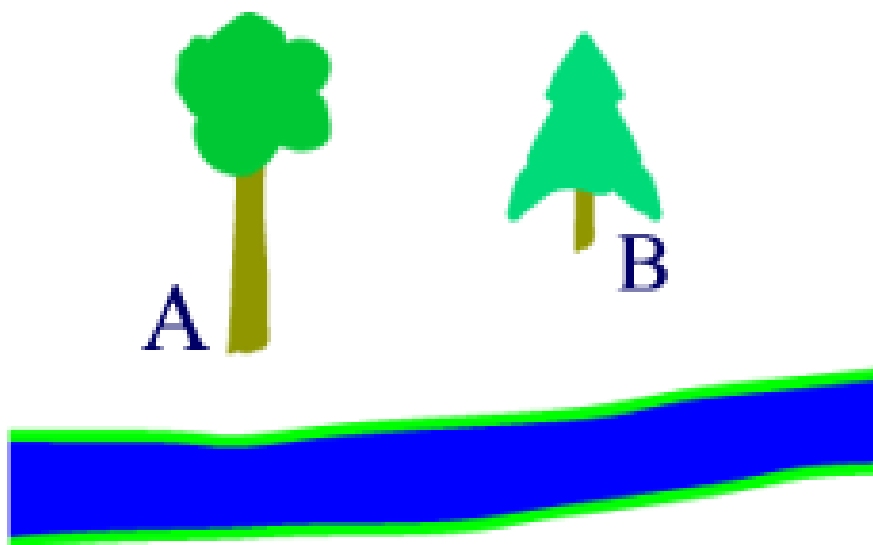
- Find et træ, og forestil jer, at der er en bred å mellem jer og træet.
- Tag de nødvendige mål
- Tegn en skitse.
- Tilbage i klassen skal I fremstille en tegning i et bestemt målestoksforhold og bestemme afstanden til træet.

Arbejdskort 10

- Bestem afstanden mellem to træer, der står på den modsatte side af en å.

Materialer: Teodolit, målebånd og landmålerstokke.

Afstanden mellem de to træer i punkt A og punkt B skal findes. Det er ikke muligt at komme over på den anden side af åen for blot at måle afstanden.

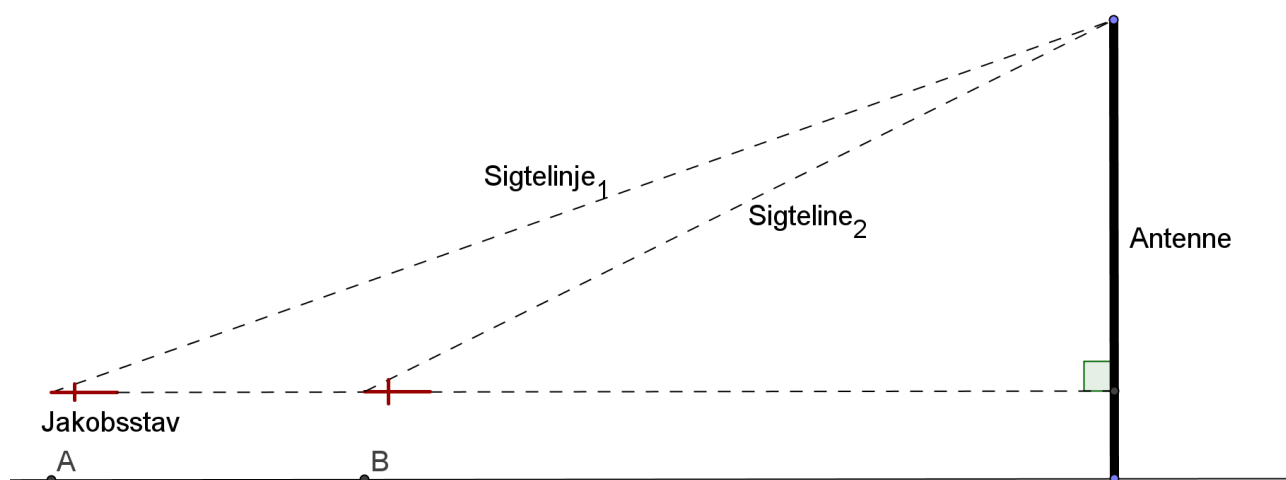


- Vælg to træer, der er et stykke væk.
- Overvej og diskuter, hvordan I vil bestemme afstanden mellem de to træer, når I ikke kan måle afstanden direkte.
- Sæt landmålerstokke i jorden og foretag, de længde- og vinkelmålinger, som I mener, er nødvendige.
- Tegn en skitse med mål.
- Tilbage i klassen skal I beregne eller tegne jer frem til afstanden mellem de to træer.

Arbejdskort 11

På den modsatte side af motorvejen står en antennemast. Vi vil gerne bestemme højden af antennemasten, men må ikke måle på tværs af motorvejen. Der kan komme biler!

En gruppe elever har lavet følgende skitse af, hvordan de løste problemet.



Først foretog de en måling i punkt A. Derefter gik de frem til punkt B og udførte en tilsvarende måling.

- Bestem højden af en antennemast eller lignende ved at bruge den samme fremgangsmåde.

Materialer: Klinometer, højdemåler eller jakobsstav og et målebånd.

- Foretag de nødvendige målinger.
- Tegn en skitse med mål.
- Tilbage i klassen tegner i et passende målestoksforhold og bestemmer højden af antennen.

Arbejdskort 12

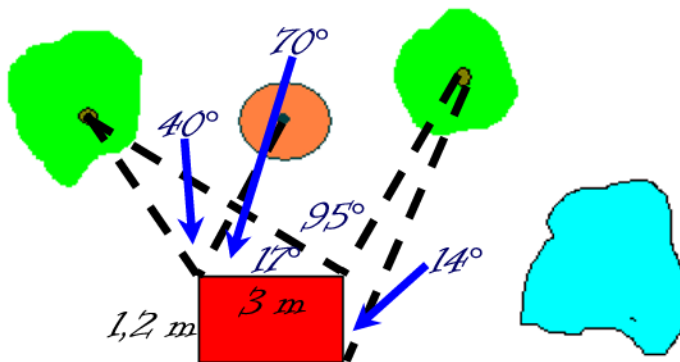
Trekantsmåling eller trigonometri har tidligere været brugt i forbindelse med tegning af landkort.

Det tager lang tid, at fremstille et kort, så i denne opgave, skal I kun indtegne et antal træer, hjørner af bygninger.

Hjælpemidler: Teodolit, målebånd.

Eksemplet er fra en gruppe der er i gang med at måle op.

Skitse af have med legehus, træer og guldfiskedam



- Find et passende sted og foretag de nødvendige målinger. Det er nok med en længdemåling!
- Tegn en skitse med mål.
- Tilbage i klassen tegner I et kort i et passende målestoksforhold.